



# Calculation of the deflection norm

Nyamsuren Batmunkh<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Institute of Astronomy and Geophysics, Mongolian Academy of Sciences, Ulaanbaatar, Mongolia

Received: 2025-11-11, Accepted: 2025-12-28, <https://doi.org/10.5564/mjag.v12i1.5202>

\*Corresponding author: [nyamsuren@iag.ac.mn](mailto:nyamsuren@iag.ac.mn) ☎ 0000-0002-1528-7740

## Abstract

A massless point is considered to move under the influence of the gravitational attraction of a central body and a perturbing acceleration  $\mathbf{P}$ . The vector  $\mathbf{P}$  remains constant in a reference frame whose axes are aligned with the velocity vector, the normal to the orbital plane, and the vector of the orbital plane's area. In this reference frame, the shift norm of the celestial body's orbit is determined. For celestial bodies with diameters less than 45 meters, since  $\rho_3$  exceeds the Earth's radius, it is possible to achieve an orbital deflection within one month. In contrast, for celestial bodies with diameters up to 100 meters, an orbital deviation can be achieved within one year.

**Keywords:** Celestial mechanics, orbit, Keplerian elements, celestial bodies, shift norm

## 1. Удиртгал

Тэнгэрийн эрхсийн хөдөлгөөний аналитик онолыг (Wintner, 1967; Subbotin, 1968) ямар хувьсагч сонгож авснаасаа хамаараад хоёр төрөлд ангилна. Эхнийх нь координат ба хурдтай холбоотой тооцоолол, харин хоёр дахь нь тойрог замын элементүүдтэй, өөрөөр хэлбэл конфигурац орон зайн координат ба хурдны орон зайн координатууд холилдсон фаз орон зай юм. Хоёр дахь төрлийн хувьд огторгуйн элементийн гажилтуудыг (Giaccaglia, 1979) тодорхойлон илүү нарийвчлалтай тэдгээрийн утгыг олж болно. Мөн координат ба хурдны гажилтуудыг олох нь нэг их хэцүү биш. Гажилтын хэмжээг бага нарийвчлалтайгаар тооцоолоход хангалттай байдаг. Өмнөх өгүүллийн (Nyamsuren, 2023) хазайлтын нормыг нарийвчлан тооцоолов. Тиймээс тэг масстай цэг (тэнгэрийн эрхэс) нь төв бие болон гажаах хурдатгал  $\mathbf{P}$  таталцлын нөлөөн

дор хөдөлж байна гэж үзье. Вектор  $\mathbf{P}$  нь хурдны вектор, хөндлөн огтлол ба талбайн векторын дагуу чиглэсэн тэнхлэг бүхий тоололын дагалдах системд (Kholshchevnikov & Titov, 2007) тогтмол байна. Энд шүргэгч, үндсэн нормаль ба талбайн векторын дагуу чиглэсэн тэнхлэгүүдтэй харьцуулах  $\mathbf{P}$  векторыг тогтмол байна гэж үзээд бодлогын шийдийг олсон.

## 2. Онолын үндэс ба тооцоолол

Тэнгэрийн аливаа эрхсийн тойрог замын

$$\begin{aligned}x &= r(\cos u \cos \Omega - c \sin u \sin \Omega) \\y &= r(\cos u \sin \Omega + c \sin u \cos \Omega) \\z &= rs \sin u \\r \cos \theta &= a(\cos E - e) \\r \sin \theta &= a\eta \sin E,\end{aligned}\tag{1}$$

$$(\delta \mathbf{r})^2 = \delta r^2 + r^2(\delta u + c \delta \Omega)^2 + r^2(\sin u \delta i - s \cos u \delta \Omega)^2$$

$$c = \cos i, \quad s = \sin i, \quad \eta = \sqrt{1 - e^2}$$

энд,  $\omega, e, i, g, \Omega, M, a, \theta, E, u$  - дундаж хөдөлгөөн, эксцентриситет, хавтгайн налуу, перигеонийн аргумент, ургах бэлчрийн уртраг, дундаж аномаль, их хагас тэнхлэг, жинхэнэ ба гадаад төвт аномалиуд, өргөргийн аргумент гэсэн элементүүдээр тодорхойлогддог (Grebennikov & Ryabov, 1971; Morbidelli, 2014). Эдгээр хэмжигдэхүүнүүдийг тойрог замын системээс хамааран сонгож авдаг. Огторгуйн параметрийг бүхэлд нь авахгүйгээр зөвхөн эксцентриситет, хавтгайн налуу, жинхэнэ аномаль гэсэн гурван хэмжигдэхүүнийг сонгон судалж үзье. Энэхүү оновчтой шийдэл нь тэнгэрийн эрхсийн тойрог замын шинж чанараас ихээхэн хамаарна. Дээр дурдсан элементүүдээс эхний 6 элемент нь хамааралт бус, харин их хагас тэнхлэг  $a$  нь  $\omega$ - ээс хамаарсан функц

$$a = \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^{2/3} \quad (2)$$

Их хагас тэнхлэгээс хамаарах дундаж хөдөлгөөнийг (Volosov & Morgunov, 1971) сонгохдоо хараат бус хувьсах хэмжигдэхүүнийг сонгох нь дундажлах үйлдлийг хялбаршуулдаг. Учир нь гажсан хөдөлгөөнд  $M$  дундаж аномаль нь  $\omega$  -аас шугаман хамааралтай боловч  $a$  -аас мэдэгдэхүйц шугаман бус байдаг.

Өмнө нь  $O_2$  тооллын системийн  $\mathbf{P}$  гажгах хурдатгалын компонент  $P = \mathfrak{J}i_2 + \mathfrak{K}j_2 + Wk_2$ , энд  $i_2$  (хурдны векторын дагуу),  $j_2$  (оскуляц траекторийн үндсэн нормалийн дагуу),  $k_2 = k_1$  (талбайн векторын дагуу бинормаль) хувьд тооцоолъё. Гажаах хурдатгалын компонентыг  $(\mathfrak{J}; 0; 0)$ ,  $\mathfrak{J} = const$  гэж авсан. Өмнөх өгүүлүүдэд (Batmunkh et al., 2016, 2019) Эйлерийн тэгшитгэлүүдийн дундажлах хувиргалтыг оскуляц тойрог замын элементүүдийн өөрчлөлтийн хувьд авч үзэхдээ нэгдүгээр эрэмбийн нарийвчлалтайгаар  $|\mathbf{P}|$ -г ерөнхий хурдатгал  $\kappa^2/r^2$ -д хуваасан. Энд  $r$  радиус векторын модуль  $r = |\mathbf{r}|$ .

Оскуляц тойрог замын элементээс дундажлах үйлдэлд дараах томъёогоор шилжинэ.

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n \quad (3)$$

Энд  $\epsilon_n$  - оскуляц тойрог замын долоон элементүүд,  $\bar{\epsilon}_n$  - долоон дундаж элементүүд,  $u_n$  дундаж элементүүд хамаарсан функц.

Нэгдүгээр эрэмбийн хувьд  $u_n$  - аргументүүд нь дундаж ба оскуляц элементүүд байх нь ялгаагүй. Тиймээс бүрэн бус эллипс интегралаар илэрхийлсэн (Sannikova & Kholshvnikov, 2014).

### 3. Хазайлтын норм

Тэнгэрийн механикт хазайлтын норм гэдэг нь тэнгэрийн биетийн байрлалын өөрчлөлтийн хэмжээг тооцдог хэмжигдэхүүн. Энэ нь тухайн биетийн хоёр өөр агшинд байгаа байрлалын ялгаа эсвэл ажиглагдсан ба тооцоолсон байрлалын хоорондох зөрүүг хэмждэг. Мөн тэнгэрийн механик болон аналитик механикт хамгийн түгээмэл хэрэглэгддэг нь Евклидийн норм бөгөөд үүнийг стандарт норм гэж нэрлэдэг. Өөрөөр хэлбэл, тэнгэрийн механик дахь хурд, байрлал эсвэл орбитын функцүүдийн стандарт норм юм. Оскуляц тойрог замын элементүүд  $\epsilon_n, n = 1, 2, 3, 4, 5$  бусниагүй тойрог замын хөдөлгөөнд тогтмол байх удаан хувьсагч хэмжигдэхүүнүүд, харин  $M$  дундаж аномаль хурдан хувьсагч хэмжигдэхүүн. Тодорхойлолт ёсоор

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\epsilon_n, M) - \mathbf{r}(\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t) \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r}_3$$

Манай бодлогын хувьд стандарт норм нь дундаж квадрат норм бөгөөд энэ нь дундаж аномалиас хамаарсан тэгшитгэл болно (Batmunkh et al., 2016).

$$\rho_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta r_k)^2 dM, \quad k = 1, 2 \quad (5)$$

Энд

$$\rho_2 = \frac{4|\mathfrak{J}|}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{39}{128}e^2 + \frac{52505}{73728}e^4}$$

Дээр дурдсан элементүүдийн эхний 5 элементийг тогтмол, харин дундаж аномаль  $M$  нь хуацаанаас шугаман хамааралтай гэж үзвэл  $\delta i = \delta \Omega = \delta g = 0$  болно. Эндээс

$$(\Delta r_3)^2 = \delta r^2 + r^2 \delta u^2, \quad (6)$$

$\delta r, \delta u$  нь  $\delta a, \delta e, \delta M$ -аас хамаарсан шугаман функц. Өмнөх өгүүлэлд (Nyamsuren, 2023) тооцоолсон  $\omega, a, e, M$  - нь эхний утга болон хугацаанаас хамаарч байсан ба тойрог замын байрлалаас хамаарахгүй. Дундаж квадрат нормыг тооцоолъё:

$$\rho_3^2 = \|\Delta r_3\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta r_3)^2 dM$$

Өмнө тооцоолсон бодлогын дагуу (Batmunkh et al., 2016) дундаж квадрат норм нь:

$$\rho_3^2 = \frac{2 + 3e^2}{2} \delta a^2 + \frac{(5 - 4e^2)a^2}{2\eta^2} \delta e^2 + a^2 \delta M^2 + 3e a \delta a \delta e \quad (7)$$

болно. Тойрог замын хэлбэр тодорхойлодог эксцентриситет буюу  $e < 1$  Тэг. 7.

#### 4. Үр дүн, Дүгнэлт

Эдгээр олсон үр дүнгээ бага жинтэй хүчний тусламжтайгаар Дэлхийтэй мөргөлдөж болох аюултай тэнгэрийн эрхсийг тойрог замаас нь хазайлгах тооцоололд хэрэглэн бодов. Бага жин нь тодорхой зайнд тодорхой хугацааны (жил, сар) турш тэнгэрийн эрхсийн тойрог замыг өөрчлөн шилжүүлж болно. Гэхдээ нээгдээд удаагүй байгаа 100 метрээс дээш диаметртэй бага гаригийн хувьд магадлал муу байна. Одоогийн байдлаар 1 км-ээс их диаметртэй аюултай бага гаригийн тоо 154, харин аюул учруулж болох биетүүд 2512 байна. Үүнээс хэмжээгээр нь ангилан тооцоолол хийхэд 45 метрээс бага диаметртэй бүхий тэнгэрийн эрхсийн хувьд  $\rho_3$  нь Дэлхийн радиусаас их байгаа тул нэг сарын дотор тойрог замаас нь хазайлгах боломжтой. Харин 100 м хүртэлх диаметртэй тэнгэрийн эрхсийн хувьд нэг жилийн дотор хазайлт үүсгэх боломжтой байна.

#### Ашигласан номзүй (References)

Batmunkh, N., Sannikova, T., Kholshchevnikov, K., & Shaidulin, V., 2016. Norm of displacement of the position of a celestial body under variation of its orbit, *Astronomical Journal*, **93**(3), 331–331.

Batmunkh, N., Oskina, K., Sannikova, T., Titov, V., & Kholshchevnikov, K., 2019. Asteroid deflection using a low-thrust engine directed along the transverse, *Astronomical Journal*, **96**(11), 961–968.

Giaccaglia, G., 1979. *Methods of perturbation theory for nonlinear systems*, vol. 320, Moscow: Nauka.

Grebennikov, E. & Ryabov, Y., 1971. *New qualitative methods in celestial mechanics*, Nauka, Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature.

Kholshchevnikov, K. & Titov, V., 2007. The two-body problem, *Textbook (St. Petersburg: St. Petersburg State University Press, 2007)*.

Morbidelli, A., 2014. Modern celestial mechanics. aspects of solar system dynamics, *Izhevsk: Institute of Computer Science*.

Nyamsuren, B., 2023. Calculation of celestial body orbits, *Astronomy and Geophysics*, (10).

Sannikova, T. & Kholshchevnikov, K., 2014. Averaged equations of motion under constant perturbing acceleration in different reference frames, *Astronomical Journal*, **91**(12), 1060–1060.

Subbotin, M. F., 1968. *Introduction to theoretical astronomy*, Nauka, Moscow.

Volosov, V. & Morgunov, B., 1971. *The averaging method in the theory of nonlinear oscillatory systems*, Moscow State University.

Wintner, A., 1967. Analytical foundations of celestial mechanics.